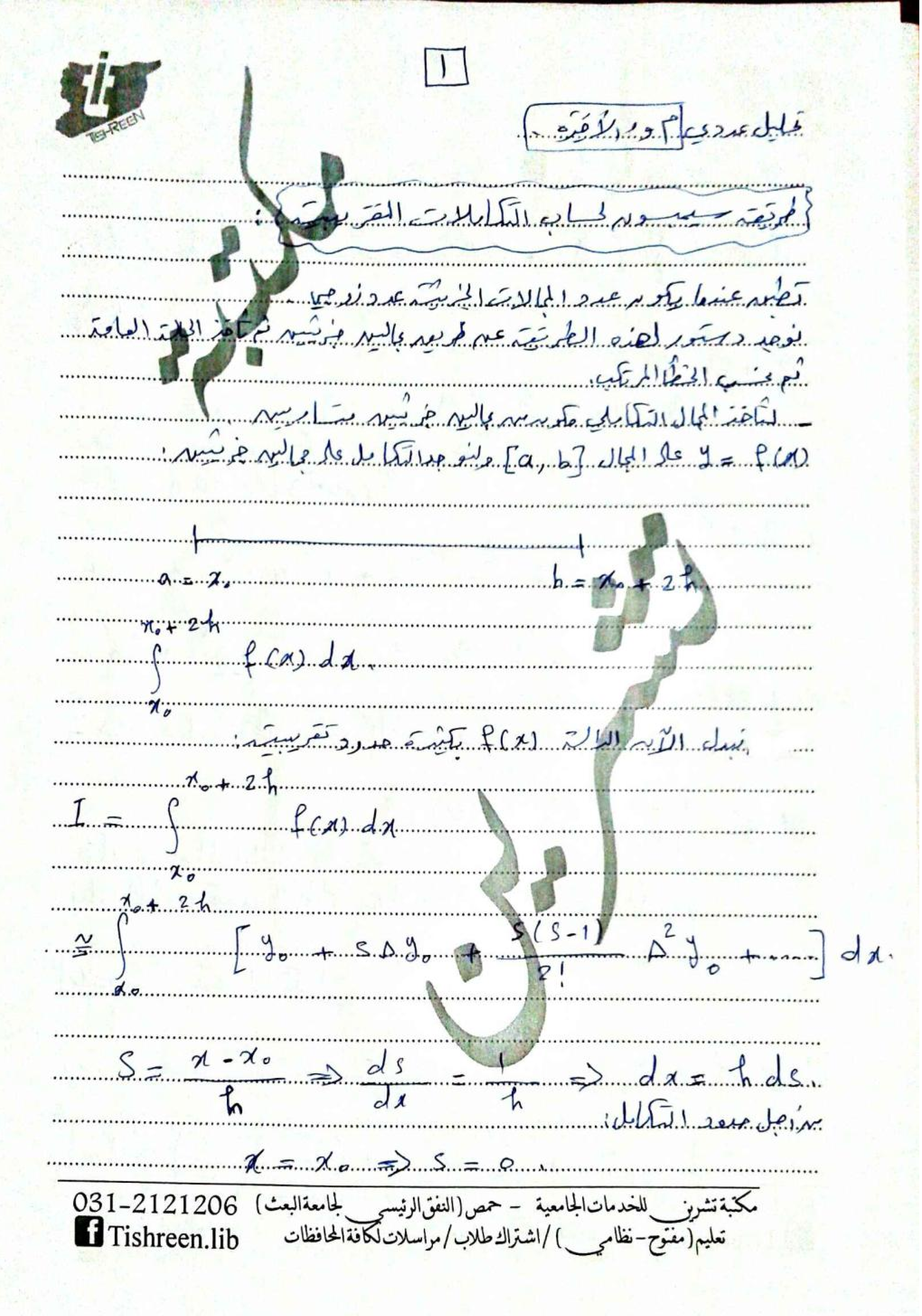


تحليل عددي | م٢ د. الأخيرة

طريقة سيمبسون لحساب التكاملات التقريبية:

تطبق عندما يكون عدد المجالات الجزئية عدد زوجياً.
نوجد دستور لهذه الطريقة عن طريق مجالين جزئيين ثم نأخذ الحالة العامة
ثم نحسب الخطأ المرتكب.

- لنأخذ المجال التكاملي مكون من مجالين جزئيين متساويين
$y = f(x)$ على المجال $[a, b]$ ولنوجد التكامل على مجالين جزئيين:

$a = x_0$ $\qquad\qquad$ $b = x_0 + 2h$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\, dx$$

نبدل الآن الدالة $f(x)$ بكثيرة حدود تقريبية:

$$I = \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\, dx$$

$$\simeq \int_{x_0}^{x_0+2h} \left[y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \right] dx$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \Rightarrow dx = h\, ds$$

من أجل حدود التكامل:

$$x = x_0 \Rightarrow s = 0$$

$x = x_0 + 2h \Rightarrow s = 2$

$$I \simeq h \int_0^2 \left[y_0 + s \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \right] ds$$

(التكامل على الكتاب).

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} \left[y_0 + 4y_1 + y_2 \right],$$

وهو دستور سيمبسون على مجالين متجاورين

ومن أجل n عدد زوجي (تعميم):

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3} \left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n \right]$$

وهو دستور سيمبسون لحساب التكاملات التقريبية.

- يمكن حساب الخطأ المرتكب كما سبق أو يحسب من خلال:

$$R \leq \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\alpha).$$

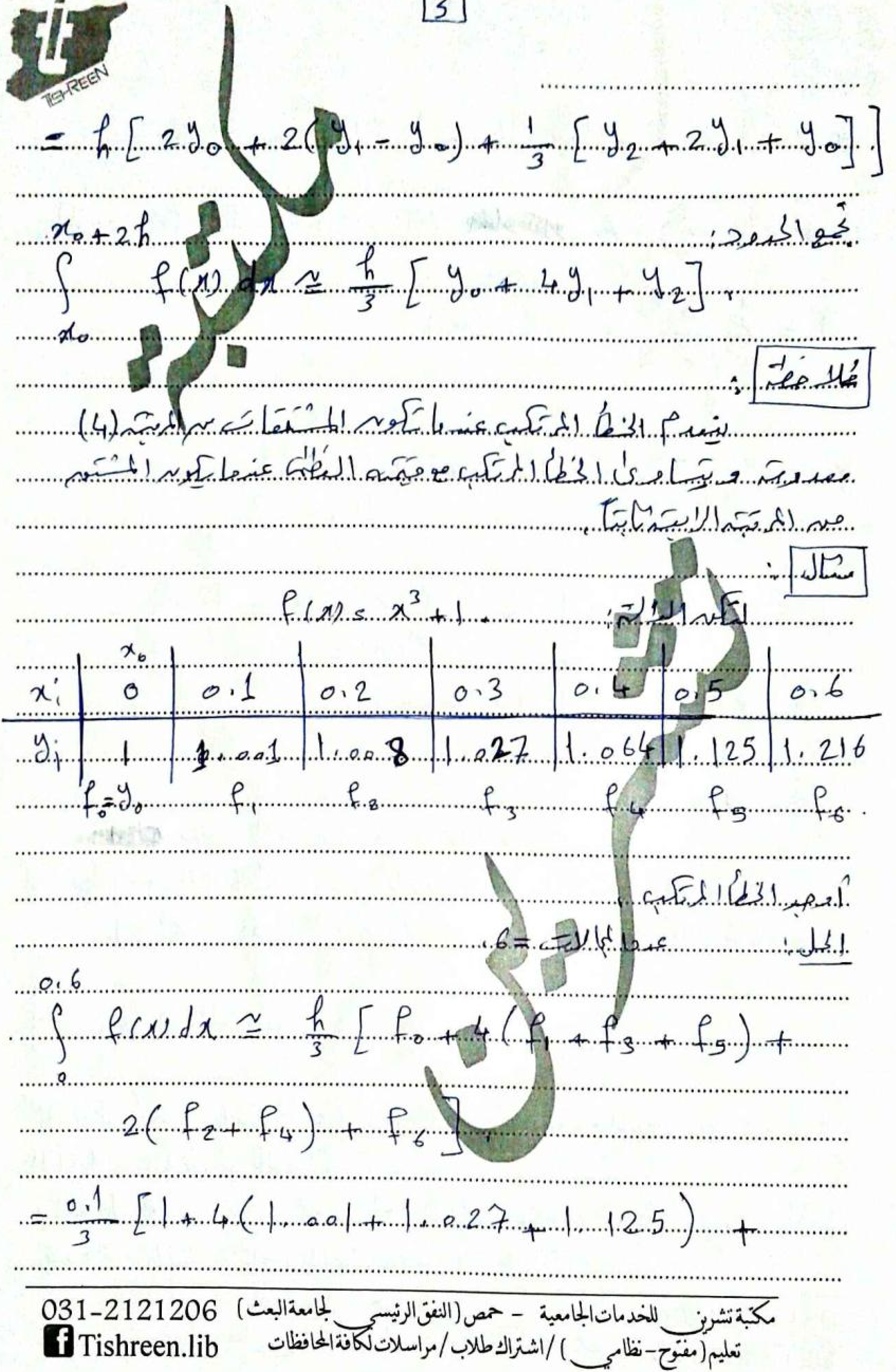
نختار α من المجال التكاملي بحيث:

يبلغ المشتق قيمته العظمى فنحصل على القيمة العظمى للخطأ

ملاحظة: تفصيل التكامل:

$$I \simeq h \int_0^2 \left[y_0 + s \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \right] dx$$

$$= h \left[s\, y_0 + \frac{s^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 \right]_0^2$$



$$= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}\left[y_2 + 2y_1 + y_0\right]\right].$$

نجمع الحدود:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right].$$

ملاحظة:

ينعدم الخطأ المرتكب عندما تكون المشتقات من المرتبة (4) معدومة ويتناسب الخطأ المرتكب مع قيمة المشتق عندما يكون المشتق من المرتبة الرابعة ثابتاً.

مثال:

لتكن الدالة: $f(x) = x^3 + 1$.

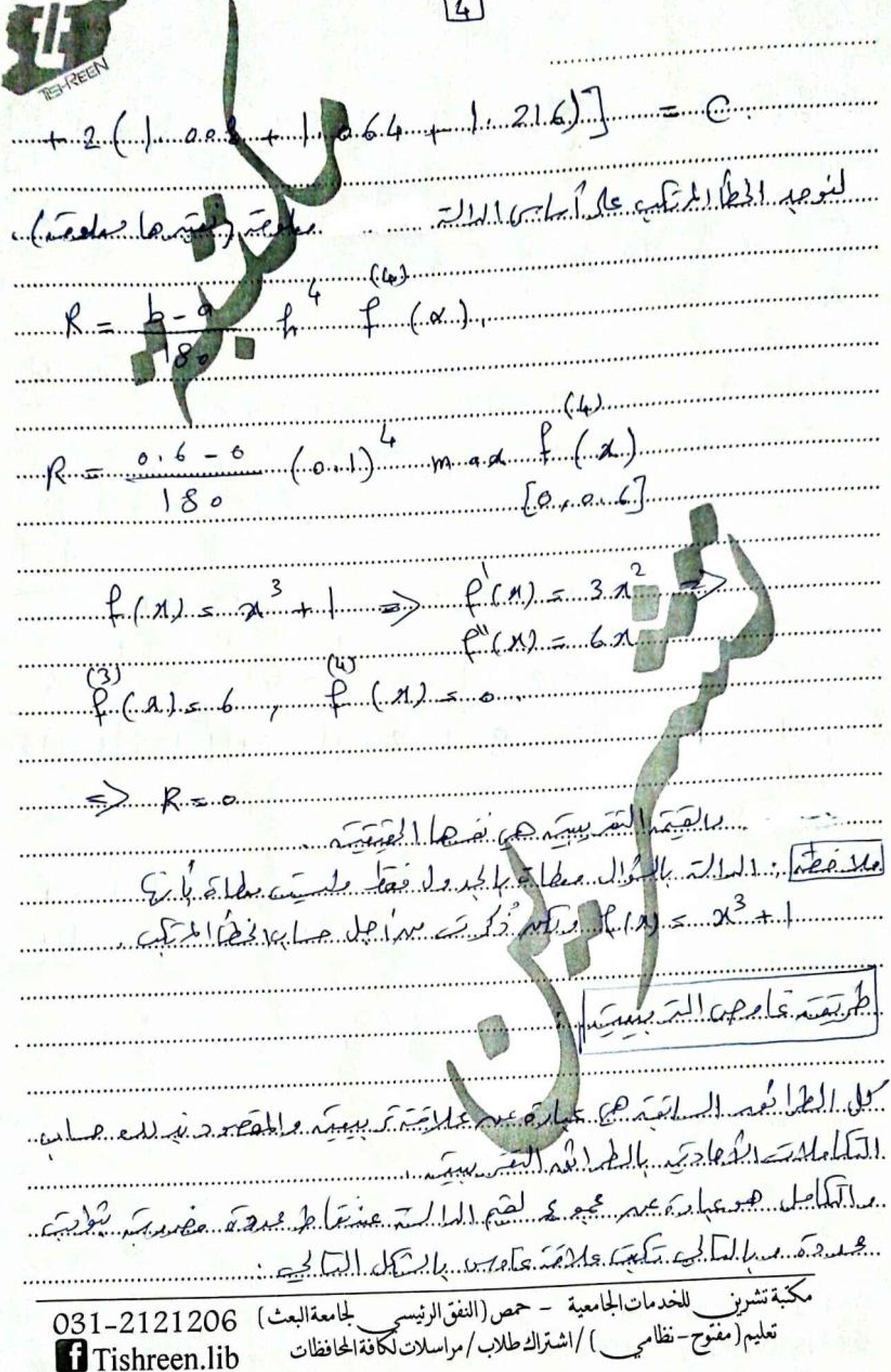
x_i	0 (x_0)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_i	1	1.001	1.008	1.027	1.064	1.125	1.216
	$f_0 = y_0$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6

أوجد الخطأ المرتكب.

الحل: عدد المجالات = 6.

$$\int_0^{0.6} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4) + f_6\right].$$

$$= \frac{0.1}{3}\left[1 + 4(1.001 + 1.027 + 1.125) + \right.$$



$$+\,2\,(1 \cdot 0.08 + 1 \cdot 0.64 + 1 \cdot 21.6)\,] = C$$

لنوجد الخطأ المرتكب على أساس الدالة ... معطاة (نفترضها معطاة).

$$R = \frac{b-a}{180}\, h^4\, f^{(4)}(\alpha)$$

$$R = \frac{0.6-0}{180}\,(0.1)^4 \max_{[0,\,0.6]} f^{(4)}(x)$$

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f^{(3)}(x) = 6 \;,\; f^{(4)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow R = 0$$

⇐ القيمة التقريبية هي نفسها الحقيقية.

ملاحظة: الدالة بالسؤال معطاة بالجدول فقط وليست معطاة بأنها $f(x) = x^3 + 1$ ولكن ذكرت من أجل حساب الخطأ المرتكب.

طريقة عامة من التبسيط:

كل الطرائق السابقة هي عبارة عن علاقة تقريبية والمقصود بها حساب التكاملات الأحادية بالطرائق التقريبية.

التكامل هو عبارة عن مجموع لقيم الدالة عند نقاط محددة مضروبة بثوابت محددة، وبالتالي نكتب علاقة عامة بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{n} c_j\, f(x_j) \quad (1)$$

لنوجد تكامل الدالة من -1 حتى +1 ثم نوجد بالحالة العامة $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ (2)

نستخدم هنا كثيرات حدود ليجندر المتعامدة.

كثيرات حدود ليجندر المتعامدة:

هي كثيرات حدود متعامدة ومعرفة على المجال $[-1,1]$ بالنسبة لوزن $w(x)=1$ وهي دالة مثقلة تكاملها على المجال $[-1,1]$ غير سالبة تفيد في حساب بعض التكاملات التي ليس لها حدود أساسية.

نقصد بالمتعامدة ما يلي:

نقول عن دالتين $f(x)$, $g(x)$ أنهما متعامدتان على المجال $[a,b]$ بدالة وزن إذا كان:

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

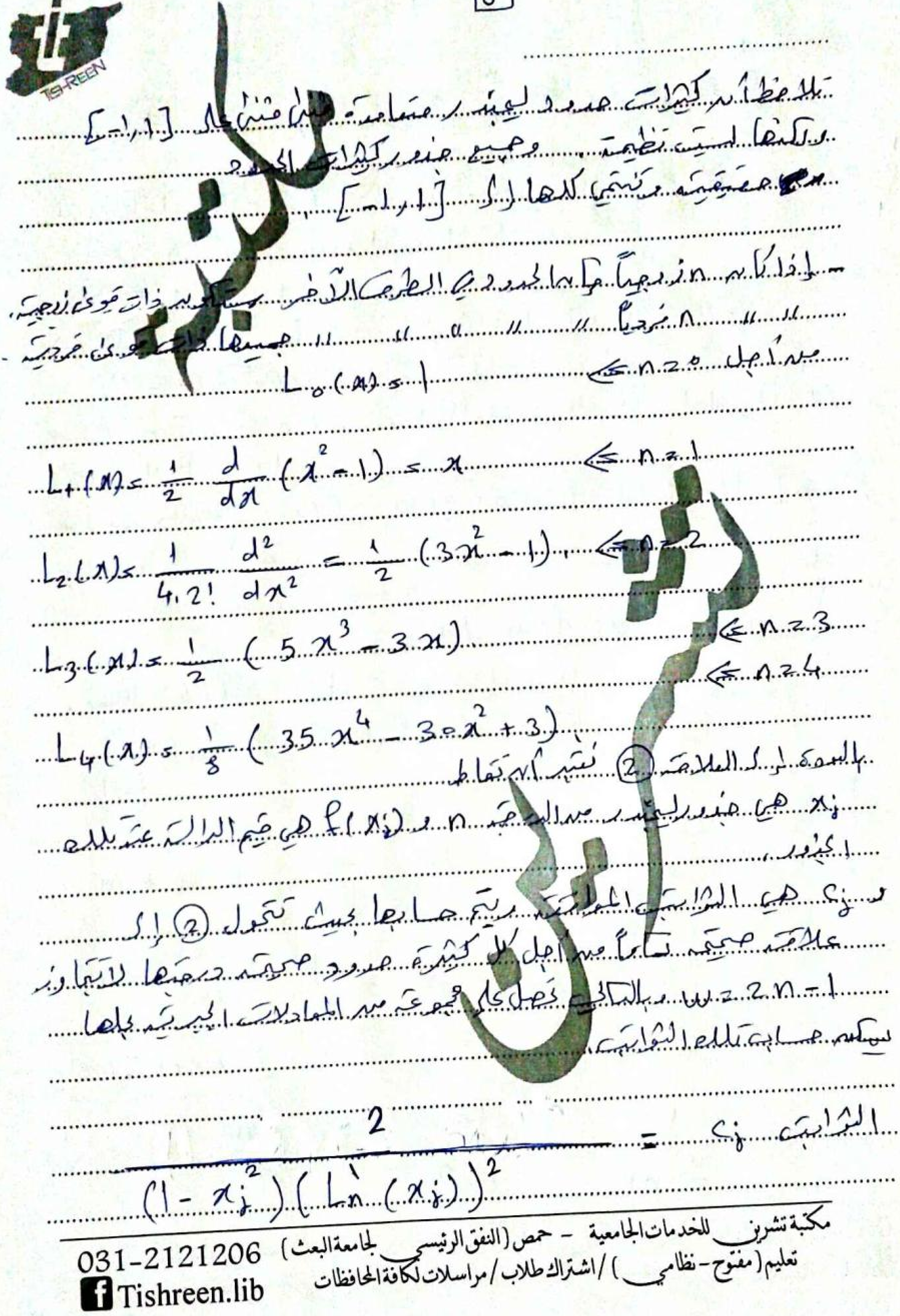
ونقول عنهما أنهما متعامدتان ونظاميتان إذا كان:

$\{f_m(x)\,,\, f_n(x)\}$ متعامدتان ونظاميتان على $[a,b]$ إذا كان:

$$\int_a^b w(x)\, f_n(x)\, f_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & ; \; n \neq m \\ 1 & ; \; n = m \end{cases}$$

صيغة رودريغ:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$



نلاحظ أن كثيرات حدود ليجندر متعامدة فيما بينها على $[-1,1]$ ولكنها ليست نظيمية. وجميع جذور كثيرات الحدود حقيقية وتنتمي كلها إلى $[-1,+1]$

- إذا كان n زوجياً فإن الحدود في الطرف الآخر ستكون ذات قوى زوجية.
" " n فردياً " " " " جميعها ذات قوى فردية.

من أجل $n=0 \Leftarrow$ $L_0(x)=1$

$n=1 \Leftarrow$

$$L_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1)=x$$

$n=2 \Leftarrow$

$$L_2(x)=\frac{1}{4.2!}\frac{d^2}{dx^2}=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$n=3 \Leftarrow$

$$L_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$n=4 \Leftarrow$

$$L_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

بالعودة إلى العلاقة (2) نلاحظ أن نقاط x_j هي جذور ليجندر من الدرجة n و $f(x_j)$ هي قيم الدالة عند تلك الجذور.

و c_j هي الثوابت الملائمة ويتم حسابها بحيث تتحول (2) إلى علاقة صحيحة تماماً من أجل كل كثيرة حدود صحيحة درجتها لا تتجاوز $m=2n-1$ وبالتالي نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية يمكن حساب تلك الثوابت.

الثابتة

$$c_j=\frac{2}{(1-x_j^2)(L_n'(x_j))^2}$$

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\, L_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & ; \quad n = m \end{cases}$$

أما إذا كان المجال $[a,b]$ فإن ① يعطي التكامل بالشكل:

$$\int_a^b f(x)\, dx \cong \sum_{j=0}^{n} A_j\, f(x_j)$$

$$A_j = \frac{b-a}{2}\, c_j$$

في هذه الحالة نجري التغيير التالي:

$$x = \frac{b-a}{2}\, t + \frac{b+a}{2}$$

عندئذٍ نعود إلى المجال $[-1,1]$ وهنا t هي كثيرات حدود ليجندر الموافقة لـ n.
جذور

مثال:

أوجد بطريقة غاوص القيمة التقريبية للتكامل الآتي:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{e^{2x+1}}$$

معتبراً أن: $n = 2$ ، $n = 3$ ثم $n = 4$.

$$n = 3 \Rightarrow L_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^2 - 3x)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{3} c_j\, f(x_j)$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow f(x_1) = 0{,}8247971$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow f(x_2) = 0{,}5$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow f(x_3) = 0{,}1752028$$

$$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2)\,(L_n'(x_j))^2}$$

$$C_1 = \frac{2}{(1 - x_1^2)\,[L_3'(x_1)]^2}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}\left[5x^3 - 3x\right]$$

$$L_3'(x) = \frac{1}{2}\left[15x^2 - 3\right]$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)\left[\frac{1}{2}\left(15\,\frac{3}{5} - 3\right)\right]^2} = \frac{5}{9}$$

$$C_2 = \frac{2}{(1)\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{8}{9}$$

ومنه يكون تكامل الدالة:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^{2x+1}} = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= 0,999999999$$

ملاحظة:

نلاحظ أن الثوابت c_j من علاقة البلانة التي تعطى بها

$$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)[L_n'(x_j)]^2}$$

ليس لها علاقة بالدالة المكاملة، فهي تتغير فقط لـ n

مثال:

أوجد $\int_0^1 x e^{2x} \, dx$ بطريقة غاوص باعتبار أن $n=3$

الحل:

باعتبار أن المجال لا يطابق $[-1,1]$ نجري التحويل:

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$$

حيث إن t هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة لـ n

$$L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \Rightarrow t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$t_2 = 0$$

$t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$x_1 = 0{,}1127$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0{,}8872983$

$f(x_1) = 0{,}1411057$

$f(x_2) = 1{,}3591409$

$f(x_3) = 5{,}2331985$

$c_3 = c_1 = \frac{5}{9}$, $c_2 = \frac{8}{9}$

$A_1 = \frac{b-a}{2} c_1 = \frac{5}{18} = A_3$

$A_2 = \frac{b-a}{2} c_2 = \frac{4}{9}$

$\int_0^1 x e^{2x} dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3)$

$= 2{,}0969499$

الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية (هام).

هي علاقة ما بين المتحول المستقل x والتابع y ومشتقاتها المتتالية من الشكل:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

إن حل المعادلة التفاضلية هي عبارة عن مجموعة منحنيات حسب الثابت c
أما مسألة كوشي لحل المعادلات التفاضلية فهي إيجاد حل المعادلة وفق شروط ابتدائية حيث:
عدد الشروط = رتبة المعادلة.
سوف نختصر الدراسة على شرط ابتدائي واحد للمعادلة من الرتبة الأولى.

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

1. طريقة أولر:

نفرض لدينا: $y' = f(x, y)$

$$y(x_0) = y_0,$$

من المعلوم أن:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

للتقريب يمكن اعتبار أن:

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{\Delta y}{h} \Rightarrow \Delta y = y' h$$

باعتبار أن:

$$y_{n+1} = y_n \mp \Delta y_n$$

يكون:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + y' h$$

ومنه يكون:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n$$

$$= y_n + h f(x_n, y_n)$$

مثال:

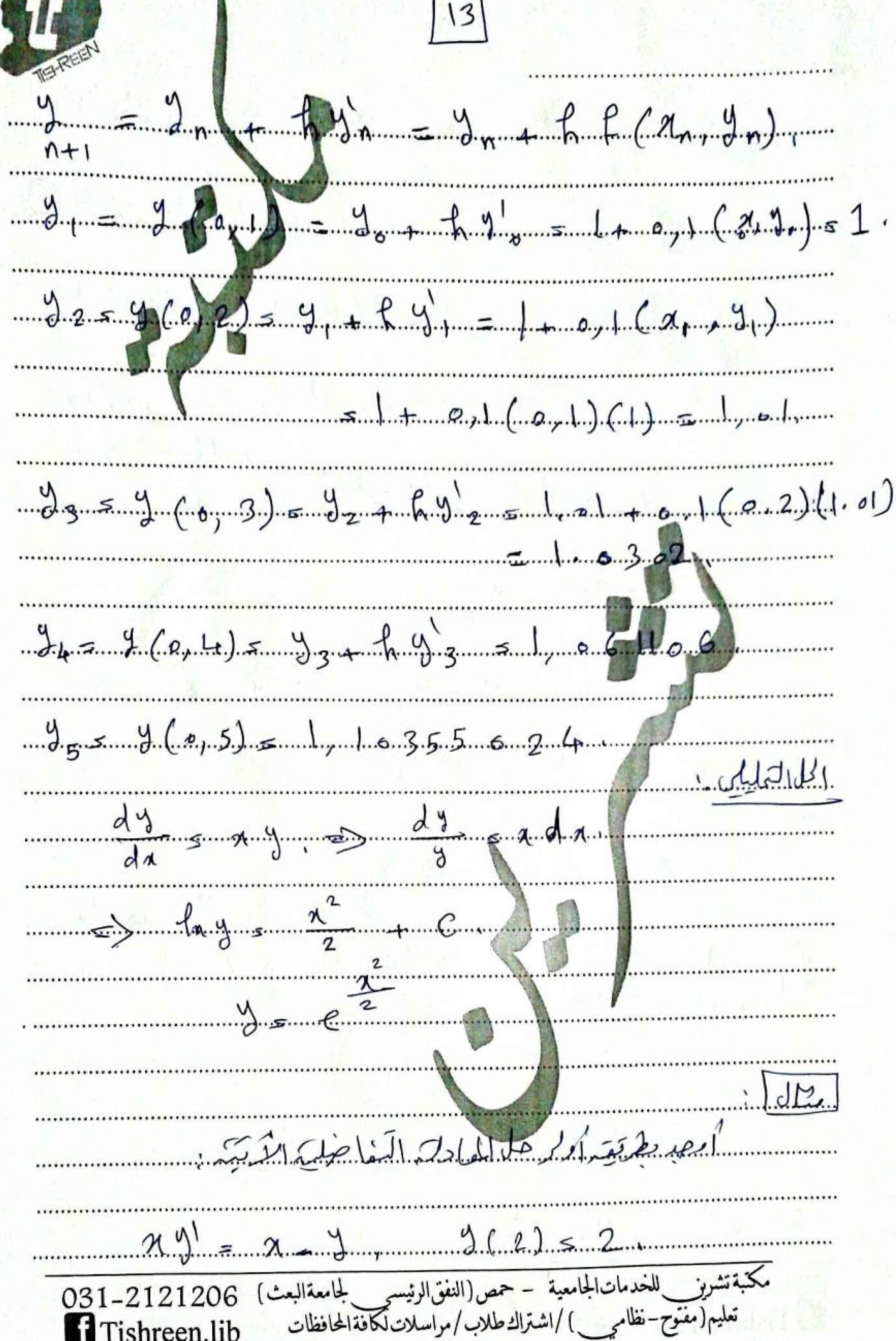
أوجد بطريقة أولر حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = xy \;;\; y(0) = 1 \to y_0$$

($0 \to x_0$)

وذلك عند النقطة $x = 0.5$ ، $h = 0.1$

الحل:



$y_{n+1} = y_n + h y'_n = y_n + h f(x_n, y_n)$

$y_1 = y(0,1) = y_0 + h y'_0 = 1 + 0,1 (x_0 y_0) = 1$.

$y_2 = y(0,2) = y_1 + h y'_1 = 1 + 0,1 (x_1 , y_1)$

$= 1 + 0,1 (0,1)(1) = 1,01$

$y_3 = y(0,3) = y_2 + h y'_2 = 1,01 + 0,1 (0.2)(1.01)$

$= 1.0302$

$y_4 = y(0,4) = y_3 + h y'_3 = 1,061106$

$y_5 = y(0,5) = 1,10355624$

الحل التحليلي:

$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx$

$\Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + c$

$y = e^{\frac{x^2}{2}}$

مثال:

أوجد بطريقة أولر حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$x y' = x - y \;,\quad y(2) = 2$.

عند النقطة : $x = 0,8$ و $h = 0,2$

② طريقة أويلر المعدلة :

لنفرض لدينا $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

ولنوجد دستوراً لحل المعادلة التفاضلية من منشور تايلور :

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''_0 + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y_0^{(3)} + \cdots$$

عند $x = x_1 \Leftarrow y = y_1$ ومنه يكون :

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 ,$$

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

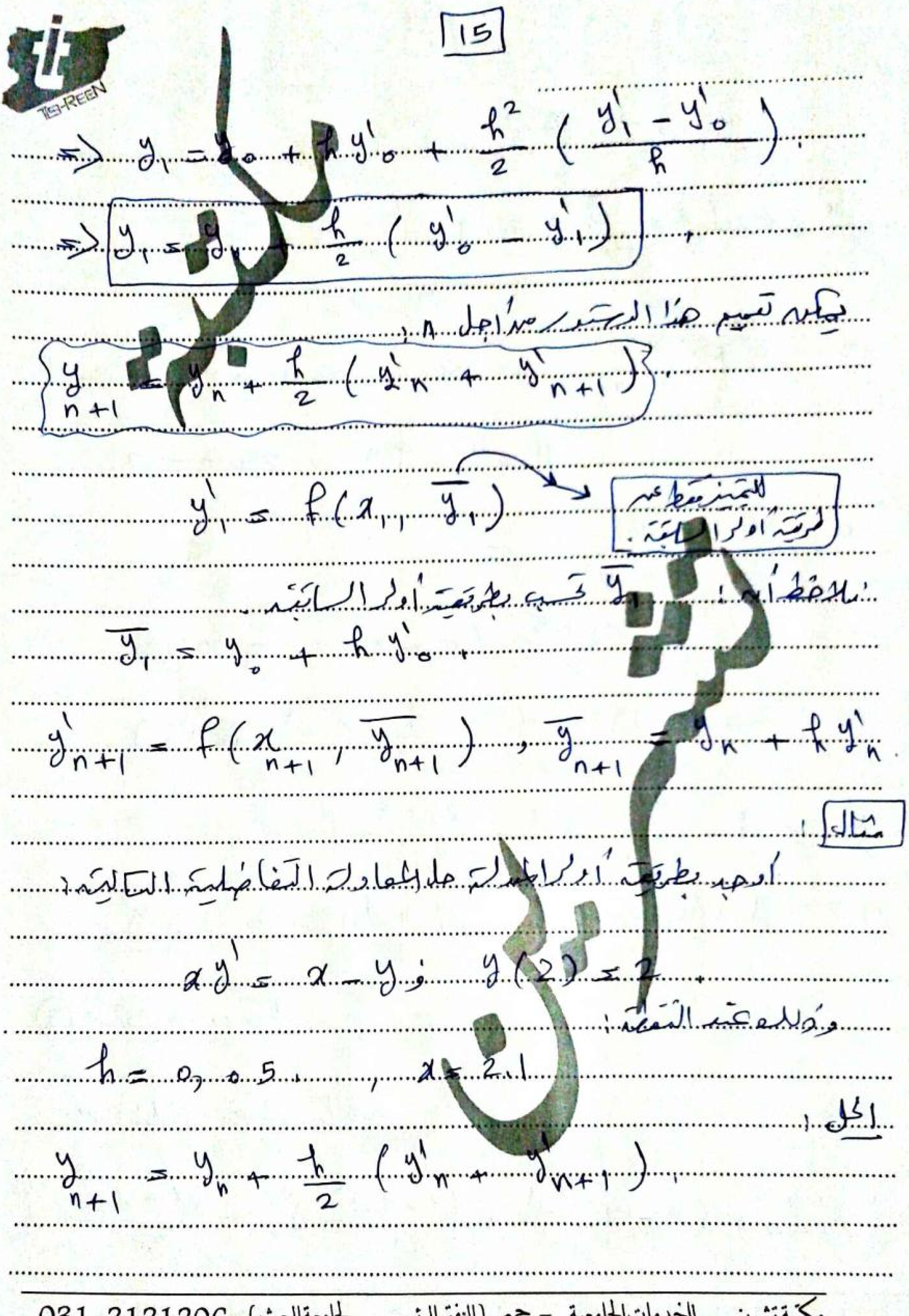
ولنوجد y''_0 :

$$y''_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta' y_0}{\Delta x} \simeq \frac{\Delta' y_0}{\Delta x} ; \Delta x = h ,$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta' y_0 = y'_1 - y'_0 ,$$

$$y''_0 = \frac{y'_1 - y'_0}{h}$$



$\Rightarrow y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2}\left(\frac{y'_1 - y'_0}{h}\right)$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(y'_0 - y'_1\right)}$

يمكن تعميم هذا القانون من أجل n :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right)}$$

$y'_1 = f(x_1, \bar{y}_1)$ ← للتمييز فقط عن طريقة أويلر السابقة.

ملاحظة : $\bar{y}_1$ تحسب بطريقة أويلر السابقة.

$\bar{y}_1 = y_0 + h y'_0$

$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$, $\bar{y}_{n+1} = y_n + h y'_n$

مثال :

أوجد بطريقة أويلر المعدلة حل المعادلة التفاضلية التالية :

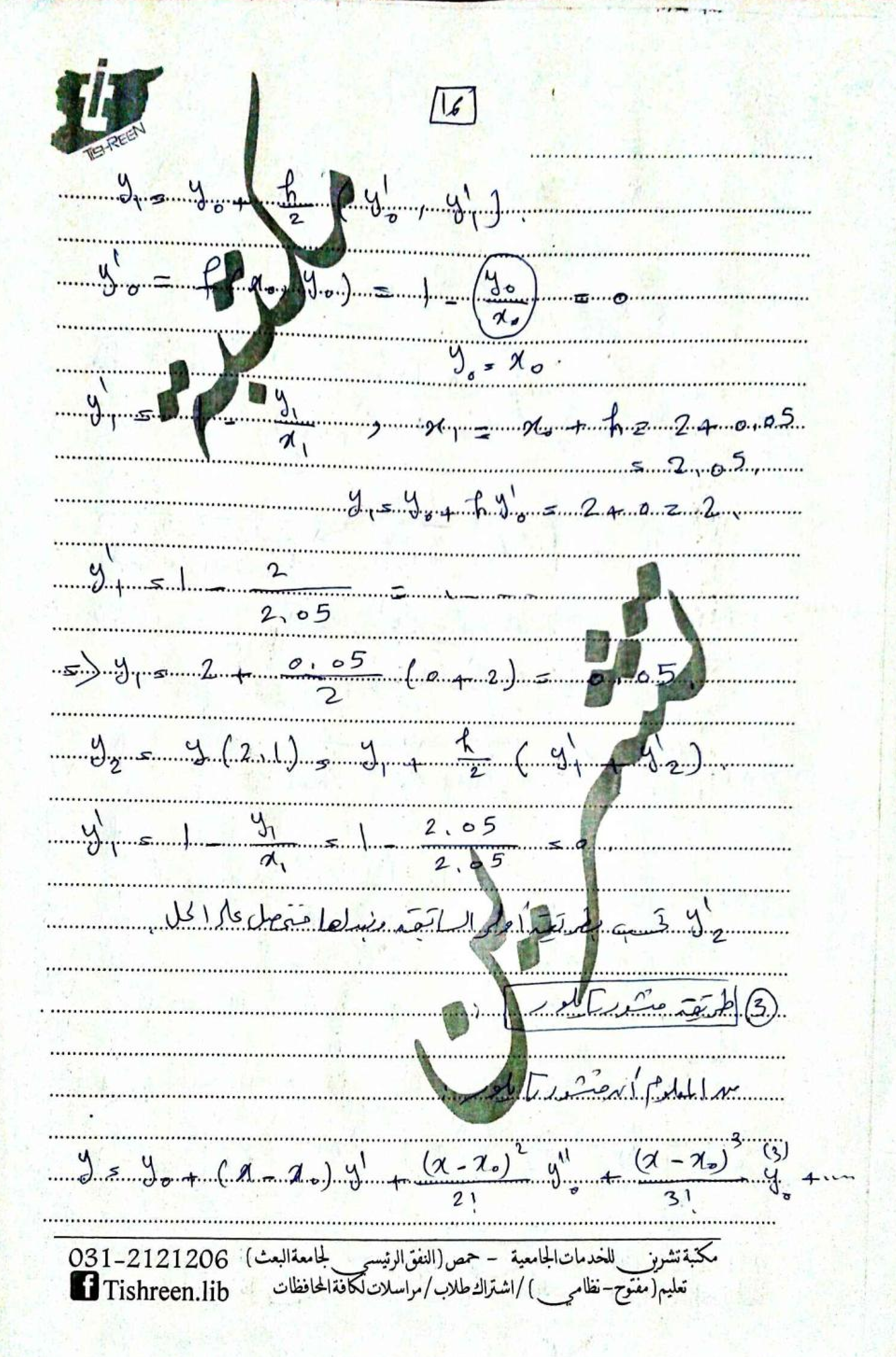
$x y' = x - y$; $y(2) = 2$

وذلك عند النقطة :

$h = 0.05$, $x = 2.1$

الحل :

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right)$



$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(y'_0 , y'_1)$$

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = 1 - \frac{y_0}{x_0} = 0$$

$$y_0 = x_0$$

$$y'_1 = 1 - \frac{y_1}{x_1} \quad , \quad x_1 = x_0 + h = 2 + 0.05 = 2.05$$

$$y_1 = y_0 + h y'_0 = 2 + 0 = 2$$

$$y'_1 = 1 - \frac{2}{2.05} = \ldots$$

$$\Rightarrow y_1 = 2 + \frac{0.05}{2}(0 + 2) = 2.05$$

$$y_2 = y(2.1) = y_1 + \frac{h}{2}(y'_1 + y'_2)$$

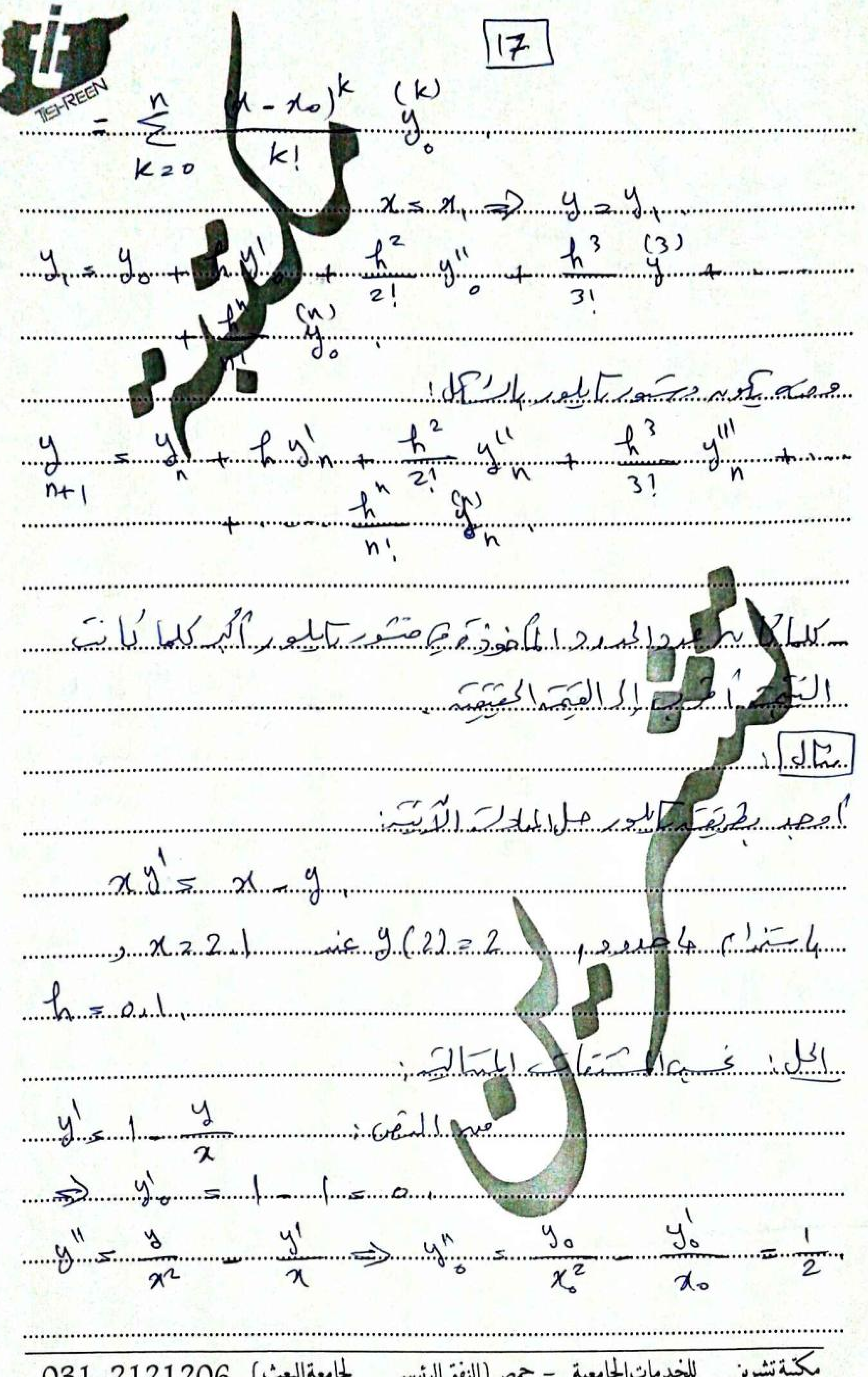
$$y'_1 = 1 - \frac{y_1}{x_1} = 1 - \frac{2.05}{2.05} = 0$$

y'_2 تحسب بطريقة أولر السابقة ونبدلها فنحصل على الحل

③ **طريقة منشور تايلور:**

من المعلوم أن منشور تايلور:

$$y = y_0 + (x - x_0)y' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y^{(3)}_0 + \ldots$$



$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} y_0^{(k)}$$

$$x = x_1 \Rightarrow y = y_1$$

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y_0^{(3)} + \dots + \frac{h^n}{n!} y_0^{(n)}$$

وعندئذ يكون دستور تايلور بالشكل:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \dots + \frac{h^n}{n!} y_n^{(n)}$$

كلما كان عدد الحدود المأخوذة من دستور تايلور أكبر كلما كانت النتيجة أقرب إلى القيمة الحقيقية.

مثال:

أوجد بطريقة تايلور حل المعادلة الآتية:

$$x y' = x - y$$

باستخدام 4 حدود، عند $y(2) = 2$ ، $x = 2.1$

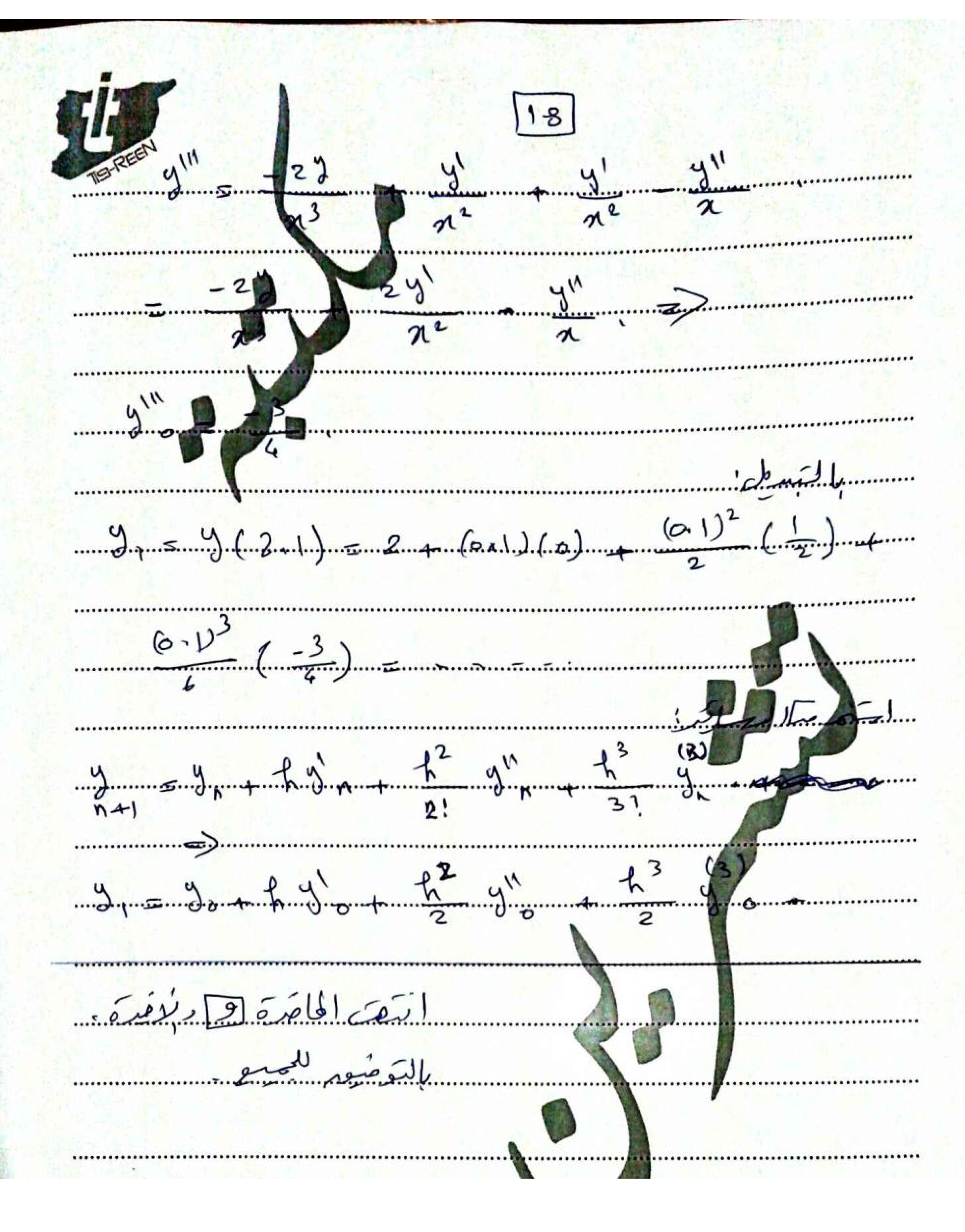
$h = 0.1$

الحل: نحسب المشتقات المتتالية:

من المعادلة: $y' = 1 - \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow y'_0 = 1 - 1 = 0$$

$$y'' = \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} \Rightarrow y''_0 = \frac{y_0}{x_0^2} - \frac{y'_0}{x_0} = \frac{1}{2}$$



$$y'' = \frac{-2y}{x^3} + \frac{y'}{x^2} + \frac{y'}{x^2} - \frac{y''}{x},$$

$$= \frac{-2y}{x^3} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{y''}{x}, \Rightarrow$$

$$y''_0 = \frac{-3}{4},$$

بالتبسيط:

$$y_1 = y(2.1) = 2 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right) +$$

$$\frac{(0.1)^3}{6}\left(\frac{-3}{4}\right) = \dots$$

استعمال صيغة:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}_n$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{2} y^{(3)}_0 .$$

انتهت المحاضرة 9 والأخيرة.

بالتوفيق للجميع.